Was wir alles nicht wissen: Mathematik

Thomas Welt, Wissenschaftsforum Ruhr e. V.

Über dem Eingang von Platons Akademie soll der Satz gestanden haben: ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω (Kein der Geometrie Unkundiger trete hier ein!). Platon selbst hat der Mathematik in seinem Werk an vielen Stellen Aufmerksamkeit gewidmet, so z. B. im *Menon*, im *Theaitetos* oder im *Timaios*. Auch im Rahmen seiner Erkenntnis- und Wissenschaftslehre nimmt die Mathematik eine herausragende Stellung ein, nur noch übertroffen von der philosophischen Dialektik (vgl. *Politeia*). Euklids *Elementa*, also ein genuin mathematisches Buch, sind in ihrer methodenbildenden Funktion für das wissenschaftliche Denken kaum zu überschätzen. War die Mathematik (zumindest im Abendland) bis in die Neuzeit (z. B. Descartes und Leibniz) eng mit der Philosophie verbunden, so nimmt sie spätestens seit der industriellen Revolution und der Aufklärung einen selbständigen herausragenden Platz als *die* Wissenschaft ein. Sie ist die Grundlage aller Naturwissenschaften (ohne selbst Naturwissenschaft zu sein) und vieler technischer Errungenschaften, aber auch zunehmend Instrument in den Lebens-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, damit prägendes Element unseres modernen Weltbildes und Leitwissenschaft der meisten Institute des Wissenschaftsforums. Da Politik (besonders gegenwärtig) Entscheidungen zumeist auf Expertise basiert, wirkt die Mathematik unmittelbar auf die Lebenswirklichkeit der Bevölkerung ein. (Die Epidemiologie und die Klimaforschung verwenden mathematische Verfahren.) Daher soll der Königin der Wissenschaften der erste Beitrag in unserer Essayreihe *Was wir alles nicht wissen* gewidmet sein. Wir gehen in diesem Aufsatz von einem gleichsam naiven Vorverständnis aus, was Mathematik sei. Grundlegende Fragen nach dem Wesen der Mathematik, nach der Seinsweise ihrer Gegenstände und ob Mathematiker finden oder erfinden, bleiben ausgeklammert. Gewisse mathematische Probleme oder Vermutungen, die teils seit Jahrhunderten beweisresistent sind, sind auch für mathematische Laien leicht verständlich. Einige dieser Vermutungen sollen hier dargestellt werden. Wenn Sie eher mathematische Probleme mögen, die schon in ihrer Formulierung recht kryptisch scheinen („Ist der Unknoten der einzige Knoten, dessen Jones-Polynom gleich 1 ist?") lesen Sie hier *nicht* weiter!

Sie meinen: Mathematik hat lebensweltlich keine Bedeutung! Weit gefehlt! Nehmen wir doch einfach das Verfahren der Vollständigen Induktion, ein Verfahren, das Sie alle aus der Schule kennen. Eine nützliche und sehr lebensweltliche Anwendung ist das Untreueproblem (frei nach Heiner Zieschang, Lineare Algebra und Geometrie, Stuttgart 1997, S. 36): In einer ansonsten idyllischen Dorfgemeinschaft spricht sich das Gerücht einer notorischen männlichen Untreue herum. Die Frauen wissen alle von der Untreue anderer Ehemänner, nur hinsichtlich des eigenen wissen sie natürlich nichts. Die Ortsvorsteherin schlägt nun ein Verfahren vor, alle Übeltäter zu identifizieren: Jede Frau, die feststellt, dass ihr Mann untreu ist, packt über Nacht dessen Koffer und stellt ihn vor die Tür und setzt den Mann drauf. Sollten 13 Untreuefälle vorhanden sein, sei garantiert, dass nach 13 Nächten 13 Männer auf ihren gepackten Koffern sitzen.

Wie ist das möglich? Angenommen, es gibt einen untreuen Mann. Dann kennen alle Frauen einen untreuen Mann bis auf die betrogene. Die schließt dann messerscharf (Es gibt untreue Männer, ich kenne aber keinen): Es ist meiner, Koffer packen und raus mit ihm am anderen Morgen! Nehmen wir nun an, es gebe zwei Hallodris und die Frauen heißen Annabell und Bertha: Annabell weiß dann von Berthas Hallodri und Bertha von Annabells. Aber Annabell sieht nach der ersten Nacht, dass Bertha keinen Koffer mit Mann vors Haus gestellt hat, und schließt daraus, dass Bertha auch einen untreuen Mann kennt, den sie selbst nicht kennt. Es muss also ihr eigener sein … Genauso schließt Bertha … Nach zwei Nächten sitzen also am frühen Morgen zwei Jungs auf ihren gepackten Koffern auf der Straße … Verallgemeinern wir das per Vollständiger Induktion von n – 1 auf n über die Anzahl der betrogenen Frauen. Den Induktionsanfang (n = 1) haben wir bereits gemacht. Die Aussage gelte nun für n – 1 Fälle: Wenn dann n – 1 Ehefrauen nach n – 1 Tagen keine Koffer mit Jungs drauf sehen, wissen sie: Es muss neben den n – 1 untreuen Männern noch einen geben, und das kann jeweils nur der eigene sein. Am n-ten Morgen sitzen also n Männer auf n Koffern und können eine WG gründen. (Da Untreue ein bipolares Phänomen ist, könnten die Jungs natürlich jetzt auch eine Gegenrechnung aufmachen, auch dafür gibt es mathematische Instrumente, aber lassen wir das – das wird richtig deprimierend.)

Auch für vermehrte Freizeitgestaltung in der Schule kann Mathematik (nicht: Rechnen) nützlich sein: Der neunjährige Carl Friedrich Gauß (1777–1855) überraschte seinen Lehrer in der Volksschule: Dieser hatte der Klasse die Aufgabe gestellt, die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 aufzuaddieren. Carl Friedrich erschien am Lehrerpult nach kurzer Zeit und präsentierte das korrekte Ergebnis: 5050. Ihm war der Zusammenhang (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + … + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51) aufgefallen, also dass die Summanden in den Klammern jeweils 101 ergeben und das 50 mal, also multiplizierte Gauß 50 mit 101, was 5050 ergibt. Er hatte intuitiv die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}\,(n+1) \text{ für n = 100}$$

angewendet. Für einen neunjährigen Schüler ist das sensationell, der Lehrer erkannte das ungewöhnliche Talent von Gauß und förderte ihn nach Kräften. Gauß gilt als einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Wenn Sie das alles nicht überzeugt, seien Sie bitte dennoch vorsichtig bei einer Zahnextraktion ohne e-Funktion. Danach sind Sie entweder tot (Überdosierung des Anästhetikums) oder Mathematik-Fan (Unterdosierung des Anästhetikums)!

Die Probleme, die hier knapp dargestellt werden sollen und wesentlich fundamentaler und schwieriger sind als die Summenformel oder die Vollständige Induktion, haben sich selbst höchstbegabten Mathematikern bisher widersetzt. Es gibt dennoch im Allgemeinen große Fortschritte in der Mathematik. Die im Jahre 1900 von David Hilbert (1862–1943) formulierten 23 mathematischen Probleme sind zu nicht geringen Teilen gelöst.

Eine auch außerhalb der Mathematik bekannt gewordene Lösung für ein mathematisches Jahrhundert-Problem war in den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts der Beweis des Großen Satzes von Fermat:

$x^n + y^n = z^n$ (x, y, z positive ganze Zahlen) *ist nicht lösbar* für natürliche Zahlen $n > 2$.

Für $n = 2$ kennen Sie hingegen eine Lösung: 3, 4, 5, denn $3^2 + 4^2 = 5^2$; es gibt sogar unendlich viele Lösungen, die sogenannten Pythagoreischen Zahlentripel; Sie können aus 3, 4, 5 unendlich viele, aber bei Weitem nicht alle, wegen

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \iff 3^2m^2 + 4^2m^2 = 5^2m^2 \iff (3m)^2 + (4m)^2 = (5m)^2,\ m \in \mathbb{N}$$

ad hoc erzeugen.

Hauptsächlich Andrew Wiles bewies die Unlösbarkeit für $n > 2$ und war leider über 39, so dass er die Fields-Medaille, den Nobelpreis für Mathematik, knapp verpasste. Also wenn Sie 39 Jahre alt sind und in diesem Jahr keinen Geburtstag mehr haben, haben Sie die Chance, die Fields-Medaille 2022 für eine mathematische Großleistung in Empfang zu nehmen – einen oder besser: sehr viele Gaußsche Momente (s. o.), einen korrekten Beweis und ein schnelles Peer Review-Verfahren vorausgesetzt. Wenn Sie zu spät kommen mit der Lösung – macht nichts, der Abelpreis wartet dann auf Sie. Den können Sie auch mit 108 Jahren oder mehr bekommen. Es gibt aber auch bedeutende Mathematiker wie Grigori Jakowlewitsch Perelman. Der löste als einziger bisher eines der sieben Millennium-Probleme (die Poincaré-Vermutung), pfiff auf die Fields-Medaille und auch auf die Million Dollar, die für die Lösung vom Clay Mathematics Institute (http://www.claymath.org/) ausgeschrieben waren. Gegen die Benennung eines

Asteroiden mit seinem Namen konnte oder wollte er sich dann nicht mehr wehren. Sie sehen, in der Mathematik geht viel … Aber, wie gesagt, wollen wir hier (*mit einer Ausnahme*) nur Probleme ansprechen, die in ihrer Formulierung fast ohne mathematische Vorbildung verständlich, bisher jedoch beweis- oder widerlegungsresistent sind.

Nehmen wir die Goldbachsche Vermutung: Das Problem versteht jeder: Der Mathematiker Christian Goldbach (1690–1764) stellte zur Diskussion, dass sich jede *gerade Zahl > 2* als Summe zweier Primzahlen schreiben lasse, also $2 < 2n = p_1 + p_2,\ n \in \mathbb{N},\ p_1, p_2 \in P$ (Menge der Primzahlen). Also z. B. 8 = 3 + 5 oder 12 = 7 + 5. Dies ist die starke Version. Die schwache (ternäre) Version lautet: Jede *ungerade Zahl größer als 5* kann als Summe dreier Primzahlen ausgedrückt werden, wobei die schwache Version aus der starken Version folgt. Das sieht man so: Sei n > 5 ungerade, dann ist n – 3 gerade. Wenn die starke Goldbachsche Vermutung gilt, folgt: $n - 3 = p_1 + p_2,\ n \in \mathbb{N},\ p_1, p_2 \in P$. Dann ist (n – 3) + 3 = n eine Darstellung aus 3 Primzahlen: $p_1 + p_2 + 3$. Verwechseln Sie bitte dieses Problem nicht mit der schon lange bewiesenen multiplikativen Primzahlzerlegung natürlicher Zahlen: Jede natürliche Zahl n kann eindeutig als Produkt von Primzahlen dargestellt werden (Fundamentalsatz der Arithmetik, Primfaktorzerlegung).

Das Collatz-Problem: Dieses Problem geht auf den Mathematiker Lothar Collatz (1910–1990) zurück. Es ist ähnlich wie die Goldbachsche Vermutung auch für mathematische Laien leicht verständlich: Gegeben sei für eine natürliche Zahl n die Abbildungsvorschrift:

$$f(n) = \frac{n}{2}, \text{ wenn n gerade ist, und}$$

$$f(n) = 3n + 1, \text{ wenn n ungerade ist.}$$

Die Collatz-Folge $f^{(k)}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}(n)$ (k aus den natürlichen Zahlen mit 0) ist dann die Iteration (Hintereinander-Ausführung) der Abbildungsvorschrift (oder einfacher gesagt: Nehmen Sie eine natürliche Zahl; wenn sie gerade ist, teilen Sie sie durch 2, wenn ungerade, multiplizieren Sie sie mit 3 und fügen 1 hinzu; setzen Sie diesen Prozess mit dem jeweiligen Resultat beliebig fort), z. B. sei n = 15, das ergibt (wenn ich mich nicht verrechnet habe):

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1 …

oder sei n = 9, das ergibt (wenn ich mich nicht verrechnet habe):

9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1 …

Man sieht, dass ab einem bestimmten Punkt die Folge periodisch wird mit den Zahlen 4, 2, 1 oder anders formuliert, dass für ein k

die Folge $f_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}^{(k)}(n)$ den Wert 1 annimmt.

Die zu beweisende Vermutung ist nun, dass diese Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Aber alle natürlichen Zahlen durchprobieren gilt nicht als Beweis. Sie müssten dann zudem noch wesentlich älter als 108 werden (um nicht zu sagen: unsterblich sein), und außer Rechnen wäre in Ihrem Leben nicht viel los. Also besser richtig beweisen, dann haben Sie auch noch für andere Dinge Zeit! Das Schöne an der Collatz-Vermutung ist, dass, wenn sie stimmt, Sie sich ruhig verrechnen können! Wenn Sie sich nur endlich oft verrechnen, kommen Sie irgendwann wieder auf die Periode 4, 2, 1.

Primzahlzwillinge: Sei $p_1$ eine Primzahl, ist dann $p_2 = p_1 + 2$ auch eine Primzahl, dann nennt man $p_1$und $p_2$ Primzahlzwillinge. 3 und 5 sind z. B. Zwillinge oder auch 5 und 7 oder 17 und 19. Die Vermutung in diesem Zusammenhang ist nun, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt oder anders ausgedrückt: Es gibt eine Konstante C mit dem Wert 2, so dass für unendlich viele Primzahlen gilt: $p_i - p_j = 2, i, j \in \mathbb{N}$.

Wenn Sie sich gerne mit Lücken befassen, lassen Sie die Finger von den reellen Zahlen, die sind nämlich vollständig dicht, aber die Legendresche Vermutung wäre etwas für Sie: Zwischen zwei natürlichen Zahlen $n^2$ und $(n + 1)^2$ gibt es mindestens eine Primzahl, zwischen $3^2$ und $4^2$ liegen z. B. 11 und 13. Zeigen Sie das für alle natürlichen Zahlen, hat auch noch keiner geschafft!

*Vollkommene*, miteinander *bekannte* und *befreundete Zahlen*: Unter den natürlichen Zahlen gibt es einige ausgezeichnete Zahlen, die besondere Eigenschaften haben. (Die Primzahlen haben wir schon erwähnt.) Fangen wir mit den sogenannten *vollkommenen Zahlen* an: Vollkommen wird eine Zahl genannt, wenn sie Summe von 1 und ihrer echten Teiler ist, also z. B. 6 = 1 + 2 + 3 oder 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Die nächste vollkommene Zahl ist schon recht groß: 496. Zurzeit sind nur 51 vollkommene Zahlen bekannt, und sie sind alle gerade, die größte ist: $2^{82.589.932} \cdot (2^{82.589.933} - 1)$. In diesem Zusammenhang gibt es zwei renitent-resistente Vermutungen:

1. Es gibt unendlich viele gerade vollkommene Zahlen.
2. Es gibt keine ungeraden vollkommenen Zahlen.

Zahlen werden nun miteinander *bekannt* genannt, wenn der Quotient $\frac{s\,(n)}{n}$ aus der Summe aller Teiler (also auch der unechten) s (n) und der Zahl n gleich ist, also: Seien n, m natürliche Zahlen, gilt nun $\frac{s\,(n)}{n} = \frac{s\,(m)}{m}$, so sind n und m miteinander bekannt. Alle vollkommenen Zahlen sind miteinander bekannt, da der Quotient aus der Teilersumme und der Zahl selbst (unechter Teiler) immer 2 sein muss:

$$s\,(6) = (1 + 2 + 3) + 6 = 6 + 6 = 2 \times 6 \text{ oder}$$

$$s\,(28) = (1 + 2 + 4 + 7 + 14) + 28 = 28 + 28 = 2 \times 28, \text{ allgemein:}$$

Ist n vollkommen, so gilt: s (n) = 2n, also $\frac{s\,(n)}{n} = 2$.

Im Allgemeinen ist es aber schwierig, Bekannte zu finden, die Bekannte der Zahl 24 ist schon sehr groß: 91.963.648. (Stellen Sie sich einmal vor, Sie finden endlich einen Bekannten und der ist dann 3.831.818,67-mal so groß wie Sie! Wenn sich mein iPhone-Rechner nicht verrechnet hat!) Hat man also bewiesen, dass es unendlich viele gerade vollkommene Zahlen gibt (s. o.), hat man auch bewiesen, dass es unendlich viele miteinander bekannte Zahlen gibt.

*Befreundet* werden diejenigen Zahlen genannt, die wechselseitig Summe ihrer echten Teiler inklusive der 1 sind, z. B.

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \text{ und}$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220,$$

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 teilen 220 und

1, 2, 4, 71, 142 teilen 284.

In diesem Zusammenhang gilt es die Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen, dass es unendlich viele befreundete Paare gibt (was man den Zahlen ja durchaus wünschen möchte).

Zuletzt wollen wir uns der Riemannschen Vermutung widmen, vielleicht dem Königsproblem der Mathematik. Viele große Mathematiker haben sich daran versucht, bisher gibt es aber auch in diesem Falle keinen Beweis. (Vielleicht hat Perelman [s. o.] einen, aber keine Lust, ihn ins Peer Review zu geben.) Die Riemannsche Vermutung unterscheidet sich insofern von den oben dargestellten ungelösten Sätzen, als sie zwar auch eminente zahlentheoretische Konsequenzen hat, aber primär in den Bereich der Funktionentheorie fällt (Theorie komplexwertiger Funktionen) und auch in ihrer Formulierung bereits sehr voraussetzungsreich und damit für Laien kaum verständlich ist:

Jede nicht triviale Nullstelle s der Zeta-Funktion $\zeta(s)$ hat im Realteil $\frac{1}{2}$,

also aus $0 = \zeta$ (s) folgt: Re (s) $= \frac{1}{2}$.

Das Problem geht auf Bernhard Riemann (1826–1866) zurück. Wenn man denn einen Mathematiker als den bedeutendsten und einflussreichsten bezeichnen möchte, so würde Riemann sicherlich in die engste Auswahl kommen. Einsteins Relativitätstheorie (um nur ein Beispiel zu nennen) wäre ohne seine Vorarbeiten undenkbar. Riemann gilt ferner als Begründer der analytischen Zahlentheorie und machte mit Hilfe der Zeta-Funktion weitreichende Aussagen zur Verteilung der Primzahlen. Im Reellen hatte bereits Leonhard Euler (1707–1783) die Zeta-Funktion untersucht und den Zusammenhang mit dem Eulerprodukt der Primzahlen gezeigt. Riemann untersuchte die Zeta-Funktion im Komplexen.

Für s mit Re (s) > 1 hat die Zeta-Funktion eine Darstellung als sogenannte Dirichlet-Reihe:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Den Zusammenhang zwischen Zeta-Funktion und Eulerprodukt sieht man so:

$$(1)\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Wir multiplizieren (1) mit $\frac{1}{2^s}$:

$$(2)\ \ \frac{1}{2^s}\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,\frac{1}{2^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}$$

Im nächsten Schritt subtrahieren wir (2) von (1) und erhalten:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2k}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

D. h., dass wir die Zeta-Funktion ohne die geraden Zahlen für n erhalten.

Iteration dieser beiden Schritte mit allen Primzahlen p ∈ $P$ und die Anwendung des Fundamentalsatzes der Arithmetik (Existenz und kanonische Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in ihre Primfaktoren) liefern:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\zeta(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2k \\ n \neq 3k \\ n \neq 5k \\ n \neq 7k \\ \vdots \\ n \neq pk}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1, k \in \mathbb{N},$$

formalisiert: $\prod_{p\,\in P}(1 - p^{-s})\,\zeta(s) = 1 \;\Leftrightarrow\; \zeta(s) = \prod_{p\,\in\,P}\frac{1}{1-\,p^{-s}}$.

(Mathematisch korrekt beweist man diesen Zusammenhang mit Vollständiger Induktion, siehe z. B. Forster 2008–9, S. 1.3, oder mit Hilfe der geometrischen Reihe, siehe z. B. Neunhäuserer [2]2017, S. 134.)

Mit dieser Formel kann man, gleichsam als Nebenprodukt, den eleganten Beweis führen, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss (Euklid hatte das bereits im 3. Jhd. v. Chr. auf andere Weise bewiesen): Man weiß, dass $\zeta\left(\lim_{s\,\to\,1} s\right)$ divergiert (genauer: sie hat bei 1 einen Pol) und daher keinen festen Wert annimmt:

$$\infty = \zeta\left(\lim_{s\,\to\,1} s\right) = \prod_{p\,\in\,P}\frac{1}{1-\,p^{-1}} = \prod_{p\,\in\,P}\frac{1}{\frac{p-1}{p}} = \prod_{p\,\in\,P}\frac{p}{p-1}$$
$$\Leftrightarrow \prod_{p\,\in P}(p-1)\,\zeta\left(\lim_{s\,\to\,1} s\right) = \prod_{p\,\in P} p$$

Weil die linke Seite divergiert, muss auch das Produkt der Primzahlen divergieren, kann also nicht das Produkt endlich vieler Faktoren sein. Mit (relativ) leichten Mitteln kann man ferner zeigen, dass $\zeta(s) = \sum_{n\,=\,1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ in ihrem Konvergenzverhalten ausschließlich von Re (s) abhängig ist und für Re (s) > 1 absolut konvergiert. Da man leicht sieht, dass in der Eulerproduktdarstellung der Zeta-Funktion: $\zeta(s) = \prod_{p\,\in\,P}\frac{1}{1-\,p^{-s}}$, wenn man für s einen Wert > 1 einsetzt, kein Faktor des Produktes null wird, folgt: $\zeta(s)$ hat für s mit Re (s) > 1 keine Nullstellen.

Eine analytische Fortsetzung der Zeta-Funktion mit Hilfe der Gamma-Funktion auf $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und eine Funktionalgleichung der Zeta-Funktion ist:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\,cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

Durch Umformen (Einsetzen von 1 – s in s) und Ausnutzung des trigonometrischen Additionstheorems cos (x – y) = cos x cos y + sin x sin y erhält man:

$$\zeta(s) = 2^s\,\pi^{s-1}\,sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma\,(1-s)\,\zeta(1-s)$$

Die trivialen (reellen) Nullstellen der Zeta-Funktion heißen nun so, weil sie gut bekannt und (relativ) leicht nachvollziehbar sind. Aus der Funktionalgleichung mit Hilfe der Γ-Funktion und des Zusammenhanges mit der Sinusfunktion folgt nämlich:

$$\zeta(-2n) = 0, n \in \mathbb{N}, \text{ da } \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0 \text{ für alle negativen geraden Zahlen.}$$

Die nicht trivialen Nullstellen liegen im kritischen Streifen Re (s) = $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$. Ab diesem Punkt wird es richtig schwierig und sehr voraussetzungsreich. Es sei nur so viel gesagt, dass die Werte von $\zeta\ (0), \zeta\ (1)$ ungleich 0 sind. Die Symmetrieachse für alle möglichen Nullstellen in diesem Streifen liegt auf der Parallelen zur imaginären Achse mit Re (s) = $\frac{1}{2}$. Die Riemannsche Vermutung besagt nun aber, dass alle Nullstellen *auf* dieser Parallelen liegen. Der Zusammenhang mit der Primzahlverteilung zeigt folgender Satz (von Koch):

$$|\pi\ (x) - Li\ (x)| \leq c\sqrt{x}\ln x \text{ (absoluter Fehler), mit } Li\ (x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Genau dann, wenn die Riemannsche Vermutung wahr ist, existiert ein reelles c > 0 mit dieser Eigenschaft, d. h., dass sich für reelles x > 0 die Funktion $\pi\ (x)$ (Anzahl der Primzahlen $\leq x$) gut annähern lässt. Dass $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi\ (x) \ln x}{x} = 1$ (relativer Fehler) ist, korrespondiert mit der Aussage, dass die Zeta-Funktion keine Nullstellen hat bei s mit Re (s) ≥ 1.

Literatur: Neunhäuserer J. Schöne Sätze der Mathematik, Berlin $^2$2017; Zieschang, H. Lineare Algebra und Geometrie, Stuttgart 1997; Forster O. Die Riemannsche Zetafunktion, Vorlesung mit Übungen im WS 2008–09, LMU München, frei zum Download unter: https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/lehre/vorlA8w_zet.html; von Koch, H.: Sur la distribution des nombres premiers. Mathematica, Bd. 24. Acta 1901, S. 159–182.

PS: Als Rausschmeißer noch eine Norbert Wiener-Geschichte: Der geniale Mathematiker und Begründer der Kybernetik Norbert Wiener (1894–1964) musste mit seiner Familie umziehen. Seine Frau kannte die Untiefen seiner Mathematiker-Existenz und gab ihm am Morgen des Umzugs einen Erinnerungszettel, bevor er ins mathematische Institut ging: Umzug, neue Adresse: … Nun nützen Erinnerungszettel wenig, wenn man sich nicht an sie erinnert. So auch bei Norbert Wiener. Also stand er am Abend vor der leeren Wohnung und geriet in Panik. Glücklicherweise begegnete ihm auf der Treppe ein Kind. Wiener fragte: „Weißt Du, wo die Familie Wiener abgeblieben ist?" Das Kind antwortete: „Papa, ich habe hier auf Dich gewartet, ich bringe Dich in unsere neue Wohnung."

Noch eine? Norbert Wiener geriet zur Mittagszeit auf dem Campus in ein (natürlich mathematisches) Gespräch mit einigen Studenten. Zum Schluss fragte er: „Bin ich aus Richtung der Mensa gekommen oder in Richtung der Mensa gegangen?" Die Studenten meinten: „Herr

Professor, Sie sind aus Richtung der Mensa gekommen!“ Daraufhin Wiener: „Gottseidank, dann bin ich ja bereits satt!“

Übrigens, Hilberts Hotel ist legendär für sein Marketing, denn es wirbt damit, dass es unendlich viele Einzelzimmer habe und so beliebt sei, dass es immer ausgebucht sei. Aber jeder Gast, der komme, bekomme auch noch garantiert ein Einzelzimmer. Übles Marketing oder seriöse Werbung? Und hat Hotelbesitzer Hilbert nicht recht, wenn er beklagt, dass sein Hotel eigentlich so gut wie leer sei, obwohl er immer unendlich viele Gäste hat?